Листок 4

Индукция

05.10.15

Задача 1. *(2 балла)* Показать, что любую сумму, начиная с 8 копеек, можно оплатить монетами в 3 и 5 копеек.

Задача 2. *(1 балл)* Придя на встречу, некоторые ее участники пожали друг другу руки. Доказать, что число людей, сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.

Задача 3. *(3 балла)* Рассмотрим всевозможные дроби с числителем 1 и любым (целым положительным) знаменателем: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5... Доказать, что для любого n ≥ 3 можно представить 1 в виде суммы n различных дробей такого вида. Например, при n = 3 можно записать так: 1 =1/2 + 1/3 + 1/6.

Задача 4. *(1 балл)* На доске написаны два числа 1, 1. Вписав между числами их сумму, получим числа 1, 2, 1. Повторив эту операцию еще раз, получим числа 1, 3, 2, 3, 1. После трех операций будут числа 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1. Какова будет сумма всех чисел на доске после 100 операций?

Задача 5. *(4 балла)* На сколько частей делят плоскость n не параллельных друг другу прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке?

Задача 6. *(2 балла)* Доказать: 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n2

Задача 7. *(3 балла)* На бумаге в клетку нарисована фигура, полученная из квадрата 32x32 удалением одной клетки в углу. Можно ли эту фигуру разрезать на "уголки", получаемые удалением угловой клетки из квадрата 2х2?

Задача 8. *(7 балла)* Известно, что x + 1/x - целое число. Доказать, что при любом натуральном n выражение xn + 1/xn тоже будет целым числом.